Aufgabe 1 (25 Punkte)

Zur Schätzung des Werbe-Effekts in einem Getränke-Unternehmen wird das folgende lineare Modell aufgestellt:

$$y_t = \beta_1 + x_{t2}\beta_2 + e_t.$$

Dabei ist

y_t : Umsatz aus Getränkeverkauf (in Millionen Euro/Jahr)
x_{t2} : Werbekosten (in Millionen Euro/Jahr)

Aus einer ökonometrischen Analyse für den Zeitraum von 1983-2001 sind die folgenden Zwischenergebnisse bekannt:

$$X'X = \begin{pmatrix} 19 & 13.8 \\ 13.8 & 13.56 \end{pmatrix}, \qquad \sum_{t=1983}^{2001} y_t = 30, \qquad \sum_{t=1983}^{2001} y_t x_t = 26.4, \qquad \sum_{t=1983}^{2001} y_t^2 = 61.$$

Das Unternehmen stellt Ihnen die neuesten Daten für das Jahr 2002 zur Verfügung, die Sie bei der nachfolgenden Analyse berücksichtigen sollen:

$$x_{2002,2} = 1.2, \qquad y_{2002} = 3.$$

1. Welche Modellannahmen treffen Sie über den Störterm bei der Anwendung der KQ-Methode und welche bei der ML-Methode?

2. Benutzen Sie die Beobachtungen bis einschließlich 2002, um den Koeffizientenvektor β mit der KQ-Methode zu schätzen.

3. Berechnen Sie die geschätzte Fehlervarianz $\hat{\sigma}^2$.

4. Berechnen Sie den Standardfehler für b_2.

5. Welchen Aussagewert hat das Bestimmtheitsmaß? Würden Sie das Bestimmtheitsmaß oder das bereinigte Bestimmtheitsmaß bei einem Vergleich von alternativen Modellen benutzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

6. Für das Jahr 2003 sind Werbekosten in einer Höhe von insgesamt 1.25 Millionen Euro vorgesehen. Mit welchem Umsatz kann das Unternehmen rechnen?

Aufgabe 2 (25 Punkte)

1. Die Deutsche Börse will den Zusammenhang zwischen Liquidität und Volatilität von Aktien untersuchen. Dazu benutzt die statistische Abteilung exemplarisch tägliche Daten der BMW–Aktie. Betrachten Sie für diese Daten folgendes Regressionsmodell aus statistisch-ökonometrischer Sicht:

   $$y_t = x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + x_{t3}\beta_3 + e_t,$$

   mit

y_t: Durschnittliche Liquidität gemessen durch das Xetra Liquiditätsmaß (XLM),
x_{t1}: Nimmt in allen Perioden den Wert 1 an (CONST),
x_{t2}: Volatilität der täglichen Renditen (VOLA),
x_{t3}: Handelsvolumen (VOLUMES).

In Abbildung 1 sind die Ergebnisse der Schätzung mit EVIEWS gegeben.

(a) Testen Sie, ob die Volatilität einen signifikanten Einfluss auf die Liquidität hat ($\alpha = 0.05$).

(b) Überprüfen Sie mit einem zweiseitigen Test die Hypothese, dass $\beta_3 = -0.4$ ist ($\alpha = 0.10$).

(c) Testen Sie die verbundene Null–Hypothese $\beta_2 = 0$ und $\beta_3 = 0$ gegen die Alternativ–Hypothese $\beta_2 \neq 0$ oder $\beta_3 \neq 0$ auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$.

2. Aus der Vorlesung ist folgende Teststatistik bekannt:

$$\lambda = \frac{\left(R\tilde{\beta} - R\beta\right)' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\tilde{\beta} - R\beta\right)}{J\hat{\sigma}^2},$$

wobei J die Anzahl der Restriktionen ist. R ist eine $J \times K$-Matrix mit Rang J, X ist eine $T \times K$-Matrix und $\hat{\sigma}^2$ ist die geschätzte Varianz der Residuen.

Wir wollen nun zeigen, dass die t–Statistik, $t = \frac{\tilde{\beta}_k - \beta_k}{\hat{\sigma}\sqrt{(X'X)^{-1}_{kk}}}$, als ein Spezialfall der Teststatistik λ aufgefasst werden kann. Nehmen Sie an, dass $K = 3$ gilt. Darüber hinaus sei $R = (0\,1\,0)$. Benutzen Sie folgende Notation:

$$\left(X'X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Nutzen Sie den Hinweis am Ende dieser Aufgabe und gehen Sie in folgenden Schritten vor:

(a) Welchen Wert hat J?

(b) Schreiben Sie $\left(R\tilde{\beta} - R\beta\right)$ in Abhängigkeit von $\tilde{\beta}_k$ und $\beta_k,\ k = 1, 2, 3$.

(c) Schreiben Sie $\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}$ in Abhängigkeit der $a_{ij},\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$.

(d) Mit den Ergebnissen aus b) und c) schreiben Sie nun λ in Abhängigkeit der $\tilde{\beta}_k$ und $\beta_k,\ k = 1, 2, 3$ und $a_{ij},\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$.

(e) Welche Verteilung hat λ in diesem Fall? Schliessen Sie auf die Verteilung von $\sqrt{\lambda}$.

Hinweis: Sei Q eine Zufallsvariable mit einer F–Verteilung mit ν_1 Zähler- und ν_2 Nennerfreiheitsgraden. Falls $\nu_1 = 1$ ist, so folgt die Zufallsvariable $\sqrt{Q}$ einer t–Verteilung mit ν_2 Freiheitsgraden. Wir notieren: $Q \sim F_{1,\nu_2} \Rightarrow \sqrt{Q} \sim t_{\nu_2}$.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Eine grosse Firma aus dem Bereich der Computertechnik setzt zur Schätzung der Nachfrage nach Laptop-Computern ein einfaches lineares Modell ein:

$$y_t = \beta_1 + x_t\beta_2 + e_t, \quad t = 1, \ldots, 100. \tag{1}$$

Dabei ist

y_t: Absatz von Laptops in 1000 Stück in Filiale t
x_t: Preis des Laptops in EUR in Filiale t

Die Vertriebsabteilung hat Absatzzahlen für insgesamt 100 Filialen erhoben. Dabei wurden 80 Filialen in Ballungsräumen (B) und 20 in Kleinstädten (K) befragt. Die folgenden Informationen sind verfügbar:

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_K \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_K \end{pmatrix},$$

$$X_B'X_B = \begin{pmatrix} 80 & 400 \\ 400 & 2080 \end{pmatrix}, X_K'X_K = \begin{pmatrix} 20 & 100 \\ 100 & 520 \end{pmatrix}, X_B'y_B = \begin{pmatrix} 48 \\ 180 \end{pmatrix}, X_K'y_K = \begin{pmatrix} 10.5 \\ 49.5 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund ihrer Erfahrung vermutet die Vertriebsleiterin, dass die Fehlervarianzen in Ballungsräumen und Kleinstädten unterschiedlich ist, so dass die Kovarianzmatrix des Fehlervektors die allgemeine Form $E[ee'] = \sigma^2\Psi$ hat.

1. Schätzen Sie zunächst das Modell (1) mit der KQ-Methode. Welche Argumente sprechen gegen die Verwendung dieses Schätzers?

2. Nehmen Sie an, dass die Fehlervarianz in kleinstädtischen Filialen (σ_K^2) gerade $1/4$ der Varianz für Filialen in Ballungsräumen (σ_B^2) beträgt. Geben Sie die Matrix Ψ für diesen Fall an. Wie sieht die Transformationsmatrix P aus, damit $e^* = Pe$ wieder die Standardannahmen der linearen Regression erfüllt?

3. Schätzen Sie β, in dem Sie die Annahme bezüglich der Fehlervarianzen aus 2. verwenden.

4. Nehmen Sie nun an, dass die genaue Beziehung zwischen σ_B^2 und σ_K^2 unbekannt ist. Beschreiben Sie für diesen Fall kurz, wie Sie den Parametervektor β schätzen würden. Berechnen Sie nichts!

5. **Computeraufgabe:** Testen Sie anhand der Eviews-Ergebnisse in Abbildung 2 die Nullhypothese einer homoskedastischen Fehlervarianz für das Aktienkursmodell ($\alpha = 0.05$). Nehmen Sie unter der Alternative an, dass die Fehlervarianz für den zweiten Zeitraum ($t = 101, \ldots, 200$) größer ist.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Der Mineralwasserhersteller *Aquaquell* vermutet einen Zusammenhang zwischen dem Verbrauch von Mineralwasser, dem Wasserpreis und der mittleren Temperatur und benutzt zur Modellierung dieser Beziehung ein lineares Regressionsmodell in der Form:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + e_t, \qquad t = 1, \ldots, 20. \tag{2}$$

Dabei ist

y_t: Absatz von Mineralwasser in Periode t
x_{t2}: Preis des Wassers in Periode t
x_{t3}: Mittlere Temperatur in Periode t

Bei einer Schätzung des obigen Regressionsmodells wurden folgende Werte für die Residuen ermittelt:

$$\sum_{t=1}^{20} \hat{e}_t^2 = 51.26, \quad \sum_{t=2}^{20} \hat{e}_t \hat{e}_{t-1} = 23.65, \quad \hat{e}_{20}^2 = 10.89, \quad \hat{e}_1^2 = 3.53\ .$$

Der Wasserverkäufer nimmt an, dass in dem Regressionsmodell Autokorrelation 1. Ordnung vorliegt, d.h.

$$e_t = \rho e_{t-1} + v_t.$$

1. Unter welchen Bedingungen kann man einen Durbin-Watson Test durchführen? Welche Annahmen trifft man für v_t?

2. Testen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5% die Hypothese, dass die Störgrößen unkorreliert sind. Nehmen Sie unter der Alternative an, dass positive Autokorrelation vorliegt.

3. Schätzen Sie mit Hilfe der KQ-Methode den Autokorrelationskoeffizienten ρ? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis?

4. Erläutern Sie kurz die wesentlichen Schritte eines Durbin-Watson-Tests gegen negative Autokorrelation.

5. **Computeraufgabe:** Benutzen Sie die EVIEWS-Ergebnisse in Abbildung 1 für die folgenden Aufgaben.

   (a) Schätzen Sie den Autokorrelationskoeffizienten ρ mit Hilfe der Angaben aus Abbildung 1.

   (b) Führen Sie einen Durbin-Watson Test auf einem 5 % Signifikanzniveau durch. Nehmen Sie nun an, Sie hätten die gleiche Durbin-Watson Statistik aus einem Modell mit 10 Regressoren erhalten. Wie würde Ihre Testentscheidung dann lauten? Begründen Sie Ihre Antwort.

LS // Dependent Variable is XLM
Date: 07/08/03   Time: 17:58
Sample: 1 200
Included observations: 200

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CONST	0.247471	1.592578	0.155390	0.8767
VOLA	0.370995	0.133560	2.777744	0.0060
VOLUMES	-0.367678	0.052949	-6.944035	0.0000

R-squared	0.221880	Mean dependent var	1.871571
Adjusted R-squared	0.213981	S.D. dependent var	0.838968
S.E. of regression	0.743810	Akaike info criterion	-0.577054
Sum squared resid	108.9908	Schwarz criterion	-0.527579
Log likelihood	-223.0823	F-statistic	28.08723
Durbin-Watson stat	1.840187	Prob(F-statistic)	0.000000

Coefficient Covariance Matrix

	CONST	VOLA	VOLUMES
CONST	2.536303	-0.211528	-0.011022
VOLA	-0.211528	0.017838	0.000348
VOLUMES	-0.011022	0.000348	0.002804

Abbildung 1: EVIEWS-Ergebnisse, Teil 1

LS // Dependent Variable is XLM
Date: 07/08/03 Time: 17:58
Sample: 1 100
Included observations: 100

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CONST	8.701597	3.839690	2.266224	0.0257
VOLA	-0.415678	0.340078	-1.222299	0.2246
VOLUMES	-0.244747	0.061565	-3.975433	0.0001

R-squared	0.146920	Mean dependent var	1.695357
Adjusted R-squared	0.129330	S.D. dependent var	0.726446
S.E. of regression	0.677844	Akaike info criterion	-0.748135
Sum squared resid	44.56885	Schwarz criterion	-0.669980
Log likelihood	-101.4871	F-statistic	8.352795
Durbin-Watson stat	1.978992	Prob(F-statistic)	0.000450

LS // Dependent Variable is XLM
Date: 07/08/03 Time: 17:58
Sample: 101 200
Included observations: 100

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CONST	-0.445418	2.696752	-0.165168	0.8692
VOLA	0.468486	0.218527	2.143836	0.0345
VOLUMES	-0.557765	0.089447	-6.235696	0.0000

R-squared	0.300693	Mean dependent var	2.047785
Adjusted R-squared	0.286274	S.D. dependent var	0.907959
S.E. of regression	0.767064	Akaike info criterion	-0.500828
Sum squared resid	57.07362	Schwarz criterion	-0.422673
Log likelihood	-113.8524	F-statistic	20.85438
Durbin-Watson stat	1.924960	Prob(F-statistic)	0.000000

Abbildung 2: EVIEWS-Ergebnisse, Teil 2