

# Feuille d'exercices 12

Prof. Melanie Schienle, Xiaoyu Fei, Edith Laget

2010-01-22

## 1. Exercice 1, 8 points

Chacune des petites démonstrations suivantes vaut 2 points.

- (a) Rappelez-vous le théorème  
Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .  
Il existe un unique projecteur  $p$  pour lequel  $F = \text{Imp}$  et  $G = \text{Kerp}$ .  
On a démontré en classe l'existence de  $p$ . Démontrez maintenant l'unicité!
- (b) Démontrez le corollaire du théorème de la base incomplète : Tout espace vectoriel de dimension finie non-nul possède une base.
- (c) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $S$  un système de vecteurs. Démontrez que  $S$  est une base de  $E$  ssi  $S$  est générateur et  $|S| = n$ .
- (d) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ . Démontrez que si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E_1$  et  $(f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $E_2$ , alors  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $E$ . De plus,  $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$ .

## 2. Exercice 2, 4 points

Soient deux projecteurs  $p$  et  $q$  d'un espace vectoriel  $E$ . Montrer que l'endomorphisme  $p + q$  est un projecteur de  $E$  ssi  $p \circ q = q \circ p = 0$ . Si c'est le cas, montrer que  $\text{Im}(p + q) = \text{Imp} \oplus \text{Im}q$  et  $\text{Ker}(p + q) = \text{Kerp} \oplus \text{Ker}q$ .

## 3. Exercice 3, 4 points

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Soit  $f$  un autre endomorphisme de  $E$ . Montrer l'équivalence

$$f \circ p = p \circ f \Leftrightarrow \text{Kerp} \text{ et } \text{Imp} \text{ sont stables par } f$$

Remarque :  $A$  est stable par  $f$  signifie que  $\forall x \in A, f(x) \in A$

## 4. Exercice 4, 4 points

On se place dans  $E = \mathbb{R}^3$ . Montrer que les vecteurs

$$a = (1, 0, 1) \quad b = (-1, -1, 2) \quad c = (-2, 1, -2)$$

forment une base de  $E$ , en passant par la base canonique.