ENSAE - Mathekurs

Correction du Devoir Libre n° 11

Exercice 1

$$(1) \quad \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{2t-t^2}} \qquad \text{pour } x \in]0,2[$$

On pose $t = 2\sin^2 u$, $u \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $\sin u > 0$ et $\cos u > 0$ Alors $dt = 4\cos u \sin u du$ et $u = \arcsin\left(\sqrt{\frac{t}{2}}\right)$.
On en déduit que :

$$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{2t-t^2}} = \int_{\arcsin\sqrt{frac12}}^{\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)} \frac{4\cos u \sin u}{\sqrt{4\sin^2 u - 4\sin^4 u}} du = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)} \frac{4\cos u \sin u}{2\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}} du$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)} du = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad \int_0^x \frac{tdt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}} \qquad \text{pour } x \in]-1,1[$$

On pose $t^2 = \cos u$, $u \in]0,\pi[$: $\sin u > 0$. Alors $2tdt = -\sin u du$. On en déduit que :

$$\int_0^x \frac{tdt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2}\int_{\arccos(0)}^{\arccos(x^2)} \frac{-\sin u}{(1+\cos u)\sqrt{1-\cos^2 u}} du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x^2)} -\frac{\sin u}{(1+\cos u)\sin u} du$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x^2)} \frac{du}{1+\cos u} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin u}{1+\cos u}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x^2)} = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\arccos(x^2))}{1+x^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-x^4}}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

$$(3) \quad \int_0^x \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt \qquad \text{pour } x \in [-1,1[$$

On pose $t = \cos u$, $u \in]0,\pi]$: $\sin u \geq 0$. Alors : $dt = -\sin u du$. On en déduit que :

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos x} \sin u \sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}} du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos x} \sqrt{1-\cos^2 u}\sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}} du$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos x} \sqrt{1-\cos u}\sqrt{1+\cos u}\sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}} du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos x} (1+\cos u) du$$

$$= \arccos x + \frac{\pi}{2} - \sin(\arccos x) + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2} - \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

Exercice 2

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n(x) = \int_1^x 1 \cdot (\ln t)^n dt =^{\text{par parties}} [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{tn(\ln t)^{n-1}}{t} dt = x(\ln x)^n - n \int_1^x (\ln t)^{n-1} dt = x(\ln x)^n - nI_{n-1}(x)$$

(2) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $P(k)$ la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad I_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^k x(\ln x)^{n-k} + Cste_n$$

$$x \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad [I_0(x) = x - 1 \text{ et } Cste_0 = -1] \quad \Rightarrow \quad P(0) \text{ vraie}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$: supposons $P(n)$ vraie. Alors :

$$I_{n+1}(x) = x(\ln x)^{n+1} - (n+1)I_n(x) + Cste_{n+1} \quad \text{d'après (1)}$$

$$= x(\ln x)^{n+1} - (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(-1)^k x(\ln x)^{n-k} - (n+1)Cste_n$$

$$= x(\ln x)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n-k)!}(-1)^{k+1} x(\ln x)^{n-k} - (n+1)Cste_n$$

$$= x(\ln x)^{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n-j+1)!}(-1)^j x(\ln x)^{n-j+1} - (n+1)Cste_n$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n-j+1)!}(-1)^j x(\ln x)^{n-j+1} + Cste_{n+1}$$

Où on pose $Cste_{n+1} = -(n+1)Cste_n$. $P(n+1)$ est vraie.
La récurrence est terminée. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Cste_n = -nCste_{n-1} \text{ et } Cste_0 = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N}, Cste_n = (-1)^{n+1} n!$$

Exercice 3

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\pi \frac{k}{n}\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$$

$$v_n = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$$

$$y_n = \ln(x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left[1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right] \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2 \quad \text{donc} \lim_{n\to+\infty} x_n = 2\exp\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)$$

Exercice 4

(1)

$$\forall x \in [a,b], f(x) = f(a) = \sup_{[a,b]} f = M \quad \Longrightarrow \quad u_n = \left[\int_a^b M^n dt\right]^{\frac{1}{n}} M(b-a)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow_{n\to+\infty} M$$

(2)

$$u_n^n = \int_a^b f(x)^n dx \leq \int_a^b M^n x \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{car } f \geq 0)$$

(3)
Soit $\epsilon > 0$. Si $\epsilon \geq M$, alors $\eta = 1$ convient.
Supposons $\epsilon < M$. Comme f est continue sur $[a,b]$, intervalle fermé, M est atteint : $\exists c \in [a,b]$ tq. $f(c) = M$.
Au voisinage de c, il existe donc un intervalle fermé $I \subset [a,b]$, de longueur $\eta > 0$, tq. :

$$\forall x \in I, f(x) \geq M - \epsilon$$

Par ailleurs

$$f^n \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{[a,b]} f^n \geq \int_I f^n \geq \eta(M-\epsilon)^n \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \geq \eta^{\frac{1}{n}}(M-\epsilon)$$

(4)
La précédente relation est valable pour tout $\epsilon > 0$, donc également pour $\varepsilon = \dfrac{\epsilon}{M+1}$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \eta^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \eta^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad \eta^{\frac{1}{n}} \geq 1 - \varepsilon$$

$$\text{Ainsi,} \qquad n \geq n_1 \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \geq (1-\varepsilon)(M-\varepsilon) \geq M - (M+1)\varepsilon = M - \epsilon$$

De plus, $M(b-a)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow_{n\to+\infty} M \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2 \quad u_n \leq M - \epsilon$
En posant $n_3 = \max(n_1, n_2)$, on a montré que :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_3 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_3 \quad M - \epsilon \leq u_n \leq M + \epsilon$$

CQFD